Les Affinités Électives _ Le joli mot de Goethe

entre la théorie de l'intégration et le grammairien

Intégrale ! je t'ai soûlée dans mes salles de classes ; je t'ai soûlée sans te désaltérer ; _ je t'ai baignée dans les nuits pleines d'étoiles ; je t'ai bercée sur les vagues ; j'ai voulu t'endormir sur les flots… Intégrale ! Intégrale ! que te ferais-je ? que veux-tu donc ? Est-ce que tu ne te lasseras pas de ce chantage qui m'oblige à connaître l'ivresse, qui selon toi : « me fera croire meilleur, plus grand, plus respectable, plus vertueux, plus riche, etc.… que je ne suis. » ?

La répondance est une éthique. On est « responsable de », on est « répondant » à la voix et la présence qui s'approchent de nous et par conséquent de l'enseignement d'un concept.

Mathilde Cazenave, Maths Spé MP Lycée privé Fénelon _ Dans le document : « Connaissez-vous Andrew Wiles ? » Vous écriviez : « J'ai le souvenir d'un grand maître qui nous demandait, lors de ma formation de prouver sans relâche d'abord notre lucidité en posant correctement le problème puis notre culture en produisant des exemples couvrant un champ assez vaste. » Serait-il possible d'avoir quelques éclaircissements sur cette affirmation ?

Chère Mathilde, la légende raconte qu'un roi, ayant demandé à Euclide de lui enseigner la géométrie, se plaignit de sa difficulté. Euclide lui répondit simplement : « *Il n'y a pas de voie royale.* » Je vais m'appuyer sur quelques exemples comme pierre de touche à mon argumentation, exemples utilisant les intégrales. » Mais tout d'abord, il me plaît de dire que j'ai particulièrement été marqué par la puissance intellectuelle de ce grand Maître, une articulation de la pensée frisant le génie, un regard perçant et critique, une imagination

pénétrante, une grande indépendance par rapport aux idées à la mode, une délectation intense à les renverser.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Au cours de mes études, j'imaginais sans peine l'émotion de certains grands scientifiques. Mais au-delà de cette émotion profonde, ce qui m'impressionna le plus, fut de découvrir la puissance de l'esprit humain et de l'outil dont il s'est doté : les mathématiques. Le fait qu'une simple formule algébrique puisse nous donner le mode d'emploi pour accomplir un tel exploit provoqua en moi comme un sentiment de vertige. Je n'en revenais pas. Et d'ailleurs, je n'en suis jamais revenu ! Dans mes travaux de recherches, j'ai souvent tenté d'établir les équations décrivant un phénomène encore inexpliqué. Les quelques (rares) fois où j'ai réussi, où je suis arrivé à prouver mes conjectures, j'ai retrouvé cette même sensation. Me revenaient alors en mémoire les mots du physicien Eugène Wigner : le plus étonnant, c'est l'extraordinaire efficacité des mathématiques à décrire la réalité.

Exercice 1

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et bornée, et α un réel fixé. Déterminer la limite de : $u_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right) dx.$

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

$$\cos\frac{2\pi}{5}$$

Analyse du problème

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

La fonction $t \longmapsto \exp\left(-\frac{n^2\,(t-\alpha)^2}{4}\right)$ est paire en $t-\alpha$, et présente une « bosse » en α car si $|t-\alpha| \geq a > 0$, lorsque $|t|$ tend vers l'infini, la décroissance vers 0 des valeurs de l'exponentielle est rapide.

Le « poids » de l'exponentielle se « concentre » en α, où f se comporte comme $f(\alpha+0)$ ou $f(\alpha-0)$. Ceci m'incite à introduire :

$$v_n = n\int_{-\infty}^{\alpha} f(\alpha-0)\exp\left(-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right)dx + n\int_{\alpha}^{+\infty} f(\alpha+0)\exp\left(-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right)dx$$

que je sais calculer, avec $n(x-\alpha) = t$, puis à évaluer $u_n - v_n$.

Résolution

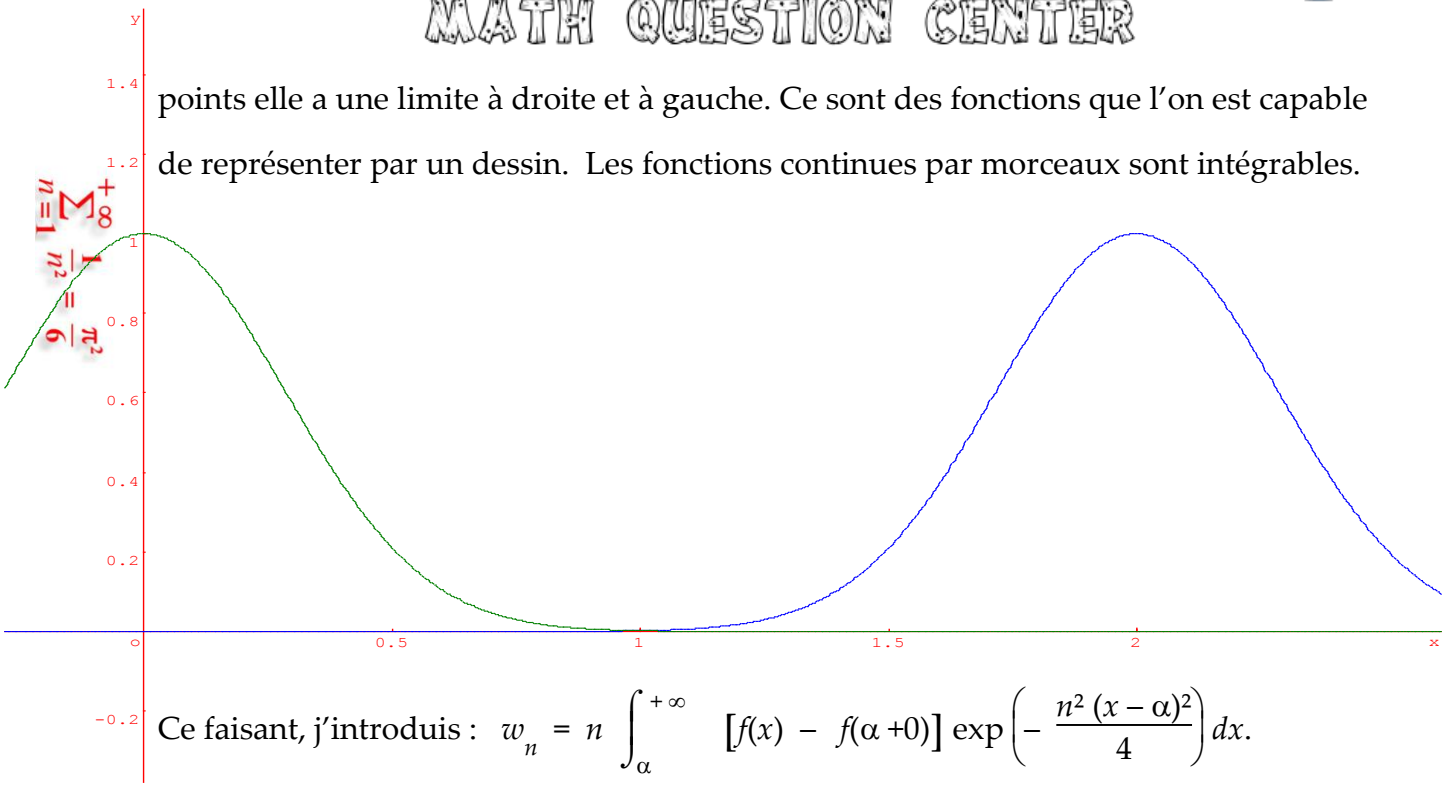
$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

Observons que l'intégrale impropre converge car $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2\exp\left(-\frac{n^2\,(x-\alpha)^2}{4}\right) = 0, \text{ pour } n>0.$$

Observons aussi qu'une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite « continue par morceaux » si elle a un nombre fini de points de discontinuité et si en chacun de ces

points elle a une limite à droite et à gauche. Ce sont des fonctions que l'on est capable de représenter par un dessin. Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.



Ce faisant, j'introduis : $w_n = n \int_{\alpha}^{+\infty} [f(x) - f(\alpha+0)] \exp\left(-\frac{n^2 (x-\alpha)^2}{4}\right) dx.$

Que faire comme disait Oulianov ? Commencer par traduire la continuité de f en α^+.

On a $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \beta > 0$, tel que $\alpha < x < \alpha + \beta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha+0)| \leq \varepsilon$, ceci nous suggère de « couper » l'intégrale en deux : $\int_{\alpha}^{+\infty} \Delta = \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} \Delta + \int_{\alpha+\beta}^{+\infty} \Delta$ d'où :

$$|w_n| \leq \int_{n\varepsilon\,\alpha}^{\alpha+\beta} \exp\left(-\frac{n^2 (x-\alpha)^2}{4}\right) dx + 2\,||f||_{\infty} \times n \int_{\alpha+\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2 (x-\alpha)^2}{4}\right) dx .$$

En posant $n(x-\alpha) = t \Rightarrow n dx = dt$, on obtient :

$$\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\left|w_n\right| \leq \varepsilon \int_0 n\beta \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt + 2\,|f|_\infty \int_{n\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt .$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

La convergence de l'intégrale impropre $I = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt$, donne alors :

À $\varepsilon > 0$, on associe $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt < \varepsilon$, mais alors, β étant associé à ε précédemment, il existe n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0$, $n\beta \geq A$, d'où, $\forall\, n \geq n_0$:

$\left|w_n\right| \leq \varepsilon(I + 2\,|f|_\infty)$, il en résulte que la suite des w_n converge vers 0.

Or $w_n = n\int_\alpha^{+\infty} f(x)\exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right)dx - nf(\alpha+0)\int_\alpha^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right)dx$

Et que la deuxième intégrale se calcule, en posant $n(x-\alpha) = t$ soit $ndx = dt$, il vient : $nf(\alpha+0)\int_\alpha^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right)dx = f(\alpha+0)\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt = \sqrt{\pi}\,f(\alpha+0)$,

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

on a finalement : $\lim_{n\to+\infty} n\int_\alpha^{+\infty} f(x)\exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right)dx = \sqrt{\pi}\,f(\alpha+0)$.

D'une manière analogue, à partir de :

$w'_n\, n \int_{-\infty}^{\alpha} [f(x) - f(\alpha - 0)] \exp\left(-\frac{n^2 (x-\alpha)^2}{4}\right) dx$, conduit à :

$\lim_{n \to +\infty} n \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) \exp\left(-\frac{n^2 (x-\alpha)^2}{4}\right) dx = \sqrt{\pi}\, f(\alpha - 0)$, et finalement la suite des u_n converge vers $\sqrt{\pi}\ [f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)]$.

Exercice 2

Soit (λ_n) une suite croissante de réels telle que $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$, et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ converge. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda_n t)dt$.

Analyse du problème

$\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ converge par hypothèse, donc à $\varepsilon > 0$, on associe $A > 0$, tel que :

$\int_A^{+\infty} |f(t)|dt \leq \varepsilon$, donc pour tout n, $\left|\int_A^{+\infty} f(t) \sin(\lambda_n t)dt\right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t)|dt \leq \varepsilon$.

Si je prouve que, pour A fixé, $\int_0^A f(t) \sin(\lambda_n t)dt = 0$ on aura, pour le même $\varepsilon > 0$, l'existence de n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0$ $\left|\int_0^A f(t) \sin(\lambda_n t)dt\right| \leq \varepsilon$ et *a fortiori*

$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda_n t) dt \right| \leq 2\varepsilon$ donc la limite cherchée sera nulle.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Résolution

Remarque : l'énoncé reste très évasif sur f, si ce n'est que son théâtre des opérations est : $\mathbb{R}_+$. Il me faut donc évaluer les cas où f est constante, réglée voire Darboux intégrable.

Or, pour $f(t)$ = constante = k sur $[0, A]$ on a

$\int_0^A f(t) \sin(\lambda_n t) dt = \frac{k}{\lambda_n}(1 - \cos \lambda_n A)$. Ceci tend vers l'infini, car λ_n tend vers l'infini par hypothèse (Δ !! ce qui justifie d'ailleurs $\lambda_n \neq 0$).

Par linéarité de l'intégrale et des limites, si f est en escalier, _ une fonction définie sur un intervalle et qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur cet intervalle et qui a un nombre fini de points de discontinuités est appelée « fonction en escalier » _ on a $\lim_{n \to +\infty} \int_0^A f(t) \sin(\lambda_n t) dt = 0$.

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Δ !! Les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont réglées et remarquons que f réglée, est limite uniforme de fonctions en escalier, donc combinaison linéaires de fonctions

constantes. Soit f intégrable sur [0, A], si on suppose f réglée, il existe g en escalier telle que $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$, d'où

$$\left|\int_0^A f(t)\sin(\lambda_n t)dt\right| \leq \int_0^A |f(t) - g(t)|dt \times 1dt + \left|\int_0^A g(t)\sin(\lambda_n t)dt\right|$$

$$\leq \varepsilon A + \left|\int_0^A g(t)\sin(\lambda_n t)dt\right|$$

et $\exists\, n_{0'}\ \forall\ n \geq n_{0'}\ \left|\int_0^A g(t)\sin(\lambda_n t)dt\right| \leq \varepsilon$, (g en escalier), d'où $\left|\int_0^A f(t)\sin(\lambda_n t)dt\right| \leq \varepsilon(1 + A)$ pour $n \geq n_{0'}$ on a bien la limite nulle : $\lim_{n \to +\infty}\left(\int_0^A f(t)\sin(\lambda_n t)dt\right) = 0.$

Si f est Darboux intégrable, il existe u et v en escalier, telles que $\forall\ t \in [0, A]$,

$u(t) \leq f(t) \leq v(t)$ et $\int_0^A (v - u) \leq \varepsilon$, (penser aux sommes de Darboux).

Mais alors, $\left|\int_0^A v(t)\sin(\lambda_n t)dt - \int_0^A f(t)\sin(\lambda_n t)dt\right|$ est majorée par

$\cos \frac{2\pi}{5}$

$\int_0^A |v(t)-f(t)|dt \leq \int_0^A (v-u) \leq \varepsilon$, et comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^A v(t) \sin(\lambda_n t)dt \right) = 0$,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(v en escalier) on conclut comme précédemment à $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^A f(t) \sin(\lambda_n t)dt \right) = 0$.

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda_n t)dt \right) = 0$.

Δ !! La formulation d'une hypothèse est un exercice actif et créateur, non l'enregistrement passif de régularités données. Nous n'argumentons pas des faits aux théories, si ce n'est par le truchement de la réfutation.

Un Maître dans l'art de la rhétorique poétique

Barack Obama devant les jeunes Français et Allemands, dans le Hall du Gymnase du Rhénus de la ville de Strasbourg ce vendredi 3 avril 2009

J'écoute Barack Obama pendant la rédaction de ce document, et je veux dire à quel point il est éloquent. Et que d'une certaine manière, l'éloquence n'est plus là. L'éloquence politique est absente de nos sociétés. Nous sommes, nous les citoyens, sevrés de langue, sevrés de belle langue. Nous n'entendons plus que de l'information grise, plate, nulle, sotte, répétitive etc… plus personne n'est dans la tradition éloquente des hommes politiques d'autrefois. Et, le peuple, dont je suis, adore cette musique là et d'une certaine manière, Barack Obama a de l'éloquence, de la rhétorique, de la musique. Il a pour ainsi dire du nombre. Autrefois, ce qu'on appelait du nombre, c'est au fond, l'utilisation du langage tel qu'il est porté par un certain type de musique. Et Barack Obama a cette musique là. Il a cette espèce de don de la parole, de la rhétorique qui fait qu'il emporte l'adhésion des gens qui l'écoute. Il renoue ainsi avec la grande tradition des rhéteurs de l'antiquité. On croit

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

entendre Cicéron, on croit entendre les orateurs antiques. Barack Obama utilise la langue anglaise avec une sorte de bonheur qui emporte les foules. Il a un corps parlant et même sans entendre ce qu'il dit, si on entend la musique on est déjà séduit. On est séduit par son corps habité par la parole. Je regardais ses épaules, sa manière de se tenir, ses bras, ses gestes, la façon dont il a de se mouvoir … Barack Obama a un corps parlant et renoue avec les conteurs anciens, et peut-être les griots Africains.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Précisons. Dans les villages où la tradition orale est seule garante de la transmission des savoirs, les mages, les griots, les sages, les philosophes, les vieillards, ceux qui savent, viennent raconter mythes et cosmogonies qui sont les histoires fondatrices de la tribu. Le parleur s'installe souvent sous l'arbre à palabres et tout autour de lui sont installés ceux qui écoutent et se nourrissent de la parole énoncée. Et la voix qui se déplie, se développe, se déploie raconte baroque, un récit.
Je l'admire par ce qu'il a réinventé le vieil homme politique éloquent et rhéteur. Ce qui me fascine chez Barack Obama, c'est sa faculté de rompre le déterminisme cérébral et d'empêcher la stagnation de l'intellect…

Exercice 3 Culturel !!!

Soit la série $n \geq 0$; $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. Étude de la convergence. Soit $f(x)$ sa somme. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$.

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Cet exercice est en quelque sorte, un dialogue entre d'**Alembert**, **Wallis**, **Laplace**, **Fubini** et bien d'autres.

$\cos\dfrac{2\pi}{5}$

Pour $x \neq 0$, avec $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ on par d'Alembert $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{x^2}{4}\dfrac{1}{(n+1)^2}$ qui tend vers 0, donc la série converge pour tout x réel.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Un peu de culture : $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n} dt = \dfrac{1\times 3\times 5\times \ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times \ldots\times 2n}\dfrac{\pi}{2}$ soit

$I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, (intégrale de Wallis), donc, partant de $e^{ix\sin t} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{(ix\sin t)^n}{n!}$

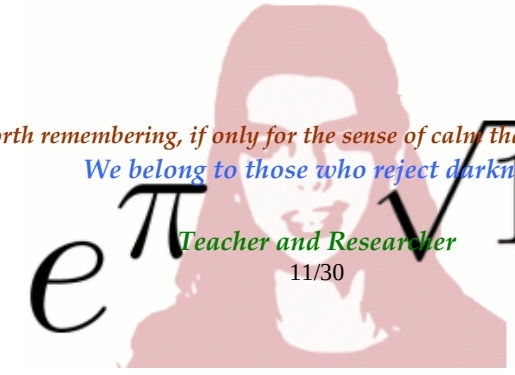
qui converge normalement en t, (x fixé) on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin t}\,dt = \sum_{n\geq 0}\frac{(ix)^n}{n!}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin t)^n dt$$

Les intégrales pour n impair sont nulles, (fonction impaire sur $[-\pi\,;\pi]$), il reste, (parité et symétrie par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ du sinus),

$\dfrac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin t}\,dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\times\left(4\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n dt\right)$$



$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \times 4 \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} = 2\pi f(x)$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

D'où $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin t} dt$. Mais alors $|f(x)| \leq 1$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ converge pour $s > 0$. C'est la *transformée de Laplace de f :*

Je la note $L(f)(s)$.

Soit $y > 0$. On a $\int_0^y e^{-st} f(t)dt = \int_0^y e^{-st} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it \sin u}}{2\pi} du \right) dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^y e^{-st} e^{it \sin u} dt \right) du \text{ (par } \textit{Fubini}\text{), et}$$

$Lf(s) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y, u)du$ avec $g(y, u) = \int_0^y e^{-st} e^{it \sin u} dt.$

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Comme $\left| e^{-st} e^{it \sin u} \right| \leq e^{-st}$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-st} dt$, $\lim_{y \to +\infty} g(y, u)$ existe, uniformément en $u \in [-\pi, \pi]$ car

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{it \sin u} dt - \int_0^y e^{-st} e^{it \sin u} dt \right| \leq \int_y^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-sy}}{s}$$ majorant qui

tend vers 0 si y tend vers $+\infty$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

On a donc $Lf(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-st + it \sin u}\, dt \right) du$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{e^{t(-s + i \sin u)}}{-s + i \sin u} \right]_0^{+\infty} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{du}{s - i \sin u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(s + i \sin u)}{s^2 + \sin^2 u}\, du$$

La partie imaginaire de l'intégrale est nulle, (fonction impaire en u) donc

$$Lf(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{s}{s^2 + \sin^2 u}\, du = \frac{s}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{du}{s^2 + \sin^2 u} = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{s^2 + \sin^2 u}.$$

Avec $t = \operatorname{tg} u, \Rightarrow dt = (1 + t^2)$ il vient :

$$Lf(s) = \frac{2s}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + t^2)}{(1 + t^2)(1 + t^2)(s^2 + t^2)}\, dt = \frac{2s}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2(s^2 + 1) + s^2}$$

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

$$= \frac{2s}{\pi(s^2+1)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{s^2}{s^2+1}} = \frac{2}{\pi\sqrt{s^2+1}} \left[\text{Arctg} \frac{t\sqrt{s^2+1}}{s} \right]_0^{+\infty}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

et finalement, $Lf(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ pour $s > 0$.

Hannah SCHEID IPESUP PC : Selon vous, pourquoi Galilée dit-il que les mathématiques sont le langage de la nature ?

Chère Hannah, sans doute cet énoncé est-il plus métaphysique que physique. Mais ce qui est sûr, c'est que les mathématiques sont devenues la grammaire de la physique, et les règles de cette grammaire doivent être apprises par ceux qui veulent décrire la nature. Il n'y a pas d'alternative.
On peut le déplorer, gémir, et même s'insurger contre cette tournure hégémonique. Il est vrai que notre esprit n'est pas spontanément attiré par les matrices unitaires, les tenseurs du deuxième ordre, les géométries à quatre dimensions ou les racines carrées de – 1.

Comment par exemple faire passer l'idée d'une limite ? L'un des grands accomplissements de la civilisation !!

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Une suite S_n converge vers ℓ si, quand on la prolonge, ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ. Jusqu'ici tout va bien. Deux mouvements mentaux sont mis en œuvre : la prolongation de la suite et sa convergence vers une limite. Et ce qui rend toute définition à venir plus rébarbative encore, c'est le fait que ces deux mouvements mentaux soient obscurément coordonnés.

Voici maintenant une version révisée mais toujours accessible de la définition. Une suite S_n converge vers ℓ si, quand on prolonge la suite, on peut réduire *indéfiniment* la distance entre S_n et ℓ.

L'image est celle d'une mer d'un bleu profond sur laquelle un bateau est porté vers un phare par le mouvement des vagues, la distance entre le navire et la côte inexorablement raccourcie. Ce qui peut vous faire penser, comme ça a été le cas pour des générations de mathématiciens, que la convergence s'articule autour d'une distance fixe mais très, très petite. C'est à ce point précis que les fantômes translucides des nombres infinitésimaux viennent hanter momentanément l'exposé. La définition de la limite leur permet enfin de reposer en paix. Soit ε un nombre réel positif que nous laisserons repartir vers la mer et ses murmures. Dire que la distance entre le navire et le phare peut être indéfiniment réduite revient à dire que *quelle que soit* la valeur ε, il finira par y avoir *un* mouvement des vagues qui poussera la bateau jusqu'à un point séparé du phare par une distance *inférieure* à ε.

Notez le double jeu capital, qui se présente presque comme une incantation ou une chanson de marin : *quelle que soit* la distance requise, on peut trouver *un* mouvement qui convienne. L'idée passe maintenant des navires aux suites. S_n converge vers une limite ℓ si *quelle que soit* la valeur de ε, on peut trouver *un* terme de la suite tel que pour *ce terme* et *les suivants* la distance soit inférieure à ε.

Votre nom semble indiquer des origines anglo- saxonnes. Si tel est le cas, une traduction dans la langue de Shakespeare de ce qui précède donnerait : A sequence S_n has a limit at the number ℓ if, as the sequence is extended, its terms get close and closer to ℓ. So far, so good. There are two mental motions here: the extension of the sequence and its convergence toward a limit. And what makes any definition to come still more rebarbative is the fact that these mental motions are somehow coordinated.

A revised but still a vernacular version of the definition now follows. A sequence S_n converges to ℓ if, by extending the sequence, the distance between S_n and ℓ may *indefinitely* be decreased.

The image is of a boat on the deep blue sea conveyed toward a light-house by the motion of the waves, the distance between ship and shore being inexorably sliced away. This may suggest, as it suggested to generations of mathematicians, that convergence hinges only upon some fixed but very, very small distance. It is at this point that the translucent ghost of infinitesimal numbers for a moment flits over the discussion. The definition of a limit allows them to rest in peace. Lest ε be a positive real number and return again to the sea and its sounds. To say that the distance between the ship and the lighthouse may indefinitely be decreased is only to say that *what-ever* the value of ε, there will eventually be *some* motion of the waves carrying the boat to a point whose distance from the lighthouse is *less* than ε.
Note the crucial double play, which presents itself almost as an incantation or sea chantey: *whatever* the requisite distance, *some* suitable motion can be found. This idea carries over from ships to sequence. S_n converges toward a limit ℓ if *whatever* the value of ε, *some* point in the sequence can be found such that *there* and *for points beyond*, the intervening distance is less than ε.

Autre exemple. Ce qui me fascine littéralement, c'est que, grâce aux mathématiques, il soit possible de prévoir avec une précision vertigineuse, l'itinéraire des astres qu'on peut observer sur une terrasse familiale. Il me paraît utile de faire comprendre aux élèves et étudiants pourquoi un même concept pouvait s'appliquer à plusieurs phénomènes. L'explication tient en ces quelques mots : les mathématiques permettent d'extraire la structure logique commune à de nombreux faits différents. Je retrouvais effectivement ce que Galilée avait découvert quatre siècle auparavant et qui lui faisait dire que les mathématiques sont le langage de l'Univers. Ce fut, au XX° siècle, le credo d'Einstein.

Retenons toutefois que, les mathématiques ne sont pas un langage purement servile ; il est apparu qu'elles ont une autonomie propre qui peut les rendre fécondes dans d'autres disciplines.
J'insiste, bien plus étranges encore que celles que l'on pourrait qualifier d'utilitaires et qui servent à décrire les phénomènes physiques, on découvre des mathématiques

qui semblent exister par elles-mêmes, indépendamment de toute réalité perceptible. Un exemple : π, le fameux « trois quatorze seize » (3, 1416). Les géomètres grecs l'ont découvert et relativement bien calculé. Sa valeur exacte est aujourd'hui connue avec une précision extrême. Au palais de la Découverte à Paris, les premières centaines de chiffres qui le composent couvrent un mur entier. Comment a-t-on pu les connaître ? En fait, on a découvert que ce nombre π peut être calculé avec des formules purement mathématiques, sans compas. Des concepts simples associés à quelques règles à suivre suffisent pour faire défiler ses décimales sur un ordinateur aussi longtemps que vous le voudrez.

Tout se passe comme si ce chenapan existait dans un autre monde, invisible à nos sens mais tout aussi réel, celui des nombres, accessible à notre seul esprit, avec ses paysages, ses structures propres. En anglais, on met en parallèle les *landscapes* (paysages matériels) et les *mindscapes* (paysages mentaux).
La question de savoir si ces concepts existent vraiment hors de l'activité mentale des êtres pensants se pose depuis l'époque des philosophes grecs (le monde des Idées de Platon…) sans que pour autant nous puissions y répondre. Du reste, que signifie « exister » pour un chiffre ou un nombre ? Voici une question à débattre en famille : deux plus deux faisaient-ils quatre au temps des dinosaures, alors qu'aucun esprit n'avait inventé les chiffres ?
Il faut me semble-t-il redécouvrir ce que les philosophes grecs appelaient « l'étonnement » : jusqu'à quel point les nombres nous permettent-ils d'expliquer le monde ? Autrement dit : les mathématiques épuisent-elles la réalité ? Toute interrogation pourrait-elle y trouver sa réponse ? Tout problème sa solution ? Tout mystère son élucidation ? Que resterait-il alors du merveilleux et de l'enchantement du monde ?

Dolaine Giroud : Maths Spé MP* Lycée Sainte-Geneviève _ Que veut dire Einstein, lorsqu'il affirme que le principe créateur réside dans les mathématiques ?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Einstein would have it otherwise: « The creative principle resides in mathematics. In a certain sense, therefore, I hold it true pure thought can grasp reality as the ancients dreamed». Chère Dolaine, en un sens, donc, je tiens pour vrai que la pensée pure peut saisir la réalité comme en rêvaient les anciens. Les mathématiques s'impliquent par exemple dans le champ de la physique. C'est en elles que réside *le principe vraiment créateur*, selon le mot d'Einstein. Il est plusieurs fois arrivé que des spéculations de nature purement mathématique aient donné naissance à des objets entièrement nouveaux de la physique fondamentale. Ce fut le cas de l'antiparticule de l'électron, qu'on appelle le *positron*, qui a été « calculée » par Dirac en 1927 avant d'être découverte en 1932 dans le rayonnement cosmique. Le positron avait été interprété par Dirac comme une des solutions de la nouvelle équation qu'il avait construite à partir de l'idée que le formalisme naissant de la mécanique devait prendre en compte les postulats de la relativité restreinte.

La puissance des mathématiques culmine en physique dans le cadre des théories dites *de jauge*, qui sont une forme élaborée de la théorie quantique des champs. La théorie de jauge la plus ancienne est celle de l'électromagnétisme. Tous ceux qui ont appris un peu de physique connaissent bien les « potentiels » de l'électromagnétisme, à partir desquels on peut calculer les champs électriques et magnétiques. Ils savent aussi que ces potentiels ne sont pas directement observables.

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Les équations de Maxwell ne déterminent pas les potentiels eux-mêmes de manière absolue, mais considèrent seulement les différences de potentiel. En particulier, on peut modifier arbitrairement la référence de ces potentiels sans bouleverser les lois de la physique. On appelle « transformations de jauge » ces modifications de potentiel, et on dit que les équations de Maxwell sont « invariantes de jauge ». Plus tard, dans les années cinquante, la méthode d'utilisation des théories de jauge a été formalisée et entendue à d'autres types d'interaction par deux théoriciens, C.N. Yang

et R. Mills. Ces théories parlent le langage mathématique puisque la notion de base qu'elles utilisent, celle de *lagrangien*, n'a de sens que dans le cadre du calcul intégral. Une particularité de ces théories est qu'elles concluent, à partir d'un principe fondamental d'invariance et de symétrie, à la nécessité d'introduire de nouvelles entités en physique, par exemple de nouvelles particules. Elles sont donc capables d'enrichir l'ontologie de la physique. En particulier, c'est avec elles qu'on compte unifier toutes les interactions fondamentales de la nature.

Laëtitia ASTAGNEAU : Maths Spé MP Institution Sainte-Marie __ Pouvez-vous être plus explicite sur le fameux « sens mathématique » que vous souhaitez transmettre aux jeunes ?

Chère Laëtitia, Il semble qu'aucun chemin logique n'existe entre les faits et l'idée théorique à partir de la quelle ils prendront sens. Les « oui mais bon sang mais c'est bien sûr » sont des jaillissements, pas des conclusions et il ne suffit pas pour créer, de répertorier des arguments et d'aligner des raisonnements. On ne découvre pas « à la chaîne », on n'invente pas qu'avec des *puisque* et des *donc.* Ceux qui croient aujourd'hui que, pour mettre sur pied la mécanique ondulatoire, il suffirait de dire : « Puisqu'on associe un *quantum* de lumière aux ondes lumineuses, pourquoi ne pas associer symétriquement une onde à l'électron ? » manquent singulièrement de recul. Il faut en effet se rappeler que lorsque Louis de Broglie eut cette idée, il était encore pratiquement le seul, avec Einstein, à croire au quantum de lumière, qui d'ailleurs ne s'appelait pas encore photon (l'idée de quantum de lumière n'avait pas été prise suffisamment au sérieux pour les physiciens aient jugé utile de le déclarer à l'état civil).

Il semble que pour inventer il faille penser non de travers, mais *à côté,* ou *en plus.* Une très grande connaissance scientifique est bien sûr une condition nécessaire, mais elle ne suffit pas, car les idées nouvelles ne germent pas de la simple accumulation des idées. Il faut un petit « coup de pouce », par lequel l'instant du *eurêka* échappe à son

contexte. C'est le plus souvent l'imagination qui se charge de donne les pichenettes décisives. Cet exercice de l'imagination, parfois proche d'une rêverie consciente, peut éveiller en nous une intuition subite qui nous détache des lourdes stabilités. Il peut nous permettre de voir au-dessus du mur sur lequel butait notre regard. Bien entendu, cela se travaille tous les jours, le plus souvent par des exercices relativement simples. Voyons-le sur deux exemples.

Exercice 4

Soit une suite réelle décroissante convergeant vers 0, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

α) _ Montrer que, ($\sum_{n \geq 0} a_n \cos nx$ converge) $\Leftrightarrow$ ($\sum_{n \geq 0} a_n$ converge).

β) _ Montrer que ($\sum_{n \geq 0} a_n \sin nx$ converge uniformément) $\Leftrightarrow$ ($n\, a_n$ tend vers 0)

L'acte de l'intelligence créatrice

Les a_n étant positifs, le α) ne pose pas de problème.

Pour le β), il est bon de se rappeler qu'une convergence est uniforme si et seulement si le critère de Cauchy est vérifié uniformément, ce qui permettra peut-être, avec l'inégalité due à la convexité : $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de passer des $a_n \sin nx$ à des des $n\, a_n$ en choisissant convenablement x.

Enfin, quand rien ne marche, pensez à une transformation d'Abel pour débloquer la situation.

$$\cos\frac{2\pi}{5}$$

Ma solution

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

α) _ Si la série des $a_n \cos nx$ converge pour tout x, elle converge pour $x = 0$, donc la série des a_n converge.
Si la série des a_n converge, comme a_n tend vers 0 en décroissant, les a_n sont positifs ou nuls, et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |a_n \cos nx| \le a_n$: il y a convergence absolue de la série des $a_n \cos nx$.

β) _ C'est beaucoup plus délicat.

Si la série des $a_n \sin nx = u_n(x)$ converge uniformément, en appliquant le critère de Cauchy uniformément on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \ge n_0,\ \forall\, m \ge n,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{p=n}^{m} u_n(x)\right| \le \varepsilon.$$

Prenons alors $n \ge n_0$, $x_n = \dfrac{1}{2n}$, pour $p = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$, on a

$$0 < \frac{1}{2} \le \frac{n+1}{2n} \le p\,x_n \le \frac{2n}{2n} = 1 < \frac{\pi}{2},$$ et par concavité, sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \ge \dfrac{2}{\pi}x$, donc

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\sin p\,x_n \ge \frac{2}{\pi}\frac{p}{2n} = \frac{p}{\pi n}.$$

En multipliant par $a_p \geq 0$, (toujours a_n tend vers 0 en décroissant), et pour $n \geq n_0$,

$m = 2n$, j'obtiens : $\varepsilon \geq \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \sin(p\, x_n) \geq \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \times \frac{p}{2n}$.

Les a_p sont tous supérieurs à a_{2n}, (décroissance de la suite), et même, on minore p par n, d'où $\forall\, n \geq n_0$:

$$\varepsilon \geq n \times a_{2n} \times \frac{n}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} 2n\, a_{2n} \geq 0, \text{ on a déjà : } \lim_{n \to +\infty} 2n\, a_{2n} = 0.$$

Comme $0 \leq (2n+1)a_{2n+1} = (2n)\, a_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2na_{2n} + a_{2n}$, et que la suite des a_k converge vers 0, on également :

$$\lim_{n \to +\infty} (2n+1)\, a_{2n+1} = 0, \text{ et finalement } \lim_{k \to +\infty} ka_k = 0.$$

Réciproquement, on suppose que a_n tend vers 0 en décroissant, et que $n\, a_n$ tend vers 0 aussi. Cela, (a_n tend vers 0 en décroissant) fait penser à une transformation d'Abel.

En introduisant $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \operatorname{Im} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$, pour $x \neq 0[2\pi]$, on a encore :

Comme $0 \leq (2n+1)a_{2n+1} = (2n)\, a_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2na_{2n} + a_{2n}$, et que la suite des a_k converge vers 0, on également :

$\lim_{n \to +\infty} (2n+1)\, a_{2n+1} = 0$, et finalement $\lim_{k \to +\infty} ka_k = 0$.

Réciproquement, on suppose que a_n tend vers 0 en décroissant, et que $n\,a_n$ tend vers 0 aussi. Cela, (a_n tend vers 0 en décroissant) fait penser à une transformation d'Abel.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

En introduisant $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \text{Im}\, \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$, pour $x \neq 0[2\pi]$, on a encore :

$$S_n(x) = \text{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)x/2} \times 2i \sin \frac{n+1}{2} x}{e^{ix/2} \times 2i \sin \frac{x}{2}} \right) = \sin \frac{nx}{2} \times \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

D'où, pour $x \neq 0[2\pi]$, $\left|S_n(x)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

Je vais majorer une somme du type : $S_{n,\,q}(x) = \sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx$, avec $q > n$, en procédant de façon différente suivante x.

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

D'abord, on travaille pour x dans $[0,\ 2\pi]$, (périodicité), et même $[0,\ \pi]$, (imparité en fait). Pour $x = 0(\pi)$, la somme est nulle. Comment utiliser l'hypothèse $n\,a_n$ tend vers 0 ? Peut-être en majorant $\left|\sin kx\right|$ par $k\left|x\right|$?

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$, $\forall\, k \geq n_0$, $0 \leq k\,a_k \leq \varepsilon$, (n'oublions pas les a_k sont positifs).

Donc pour $n \geq n_0$, et $p \geq 1$, (on verra comment lier x et p ensuite), on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \sin kx \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} k\, a_k \left|x\right| \leq p\,\varepsilon \left|x\right|.$$

Puis, si $q \geq n+p+1$, en effectuant une transformation d'Abel, on a :

$$\left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \left[S_k(x) - S_{k-1}(x)\right] \right| = \left| - a_{n+p+1} S_{n+p} + a_q S_q + \sum_{k=n+p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) S_k \right|,$$

soit, comme $a_k - a_{k+1} \geq 0$, et en majorant $\left|S_k(x)\right|$ par $\dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$:

$$\left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx \right| \leq \left(a_{n+p+1} + a_q + \sum_{k=n+p+1}^{q-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) \right) \times \frac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|} \leq \frac{2\, a_{n+p+1}}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}.$$

On a donc, avec $q \geq n+p+1$, et $x \neq 0\ [2\pi]$: $\left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx \right| \leq p\varepsilon \left|x\right| + \dfrac{2\, a_{n+p+1}}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}.$

De plus, $a_{n+p+1} \leq \dfrac{\varepsilon}{n+p+1} \leq \dfrac{\varepsilon}{p+1}$, donc pour x dans $]0, \pi[$, comme $\dfrac{x}{2} \in\ ]0, \dfrac{\pi}{2}[$,

intervalle où on a $\sin y \geq \dfrac{2}{\pi} y$, on a finalement, avec $p \geq 1$ et $q \geq n+p+1$:

$$\left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx \right| \leq p\varepsilon x + \frac{2\varepsilon}{(p+1)\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}}, \text{ soit } \leq \varepsilon\left(px + \frac{2\pi}{(p+1)x}\right).$$

Soit alors $x \in]0, \pi[$ et $p = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$, on a :

$p - 1 \leq \frac{1}{x} < p$ d'où $px \leq 1 + x < 1 + \pi$ et $(p+1)x < 1 + x > 1$, d'où $\frac{2\pi}{(p+1)x} < 2\pi$, et la majoration :

$$\left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx \right| \leq \varepsilon(1 + 3\pi),$$ valable pour tout x de $]0, \pi[$, mais aussi en 0 et π, donc le critère de Cauchy s'applique uniformément en x.

Exercice 5

Soit f continue, 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et γ dans $[0, 2\pi]$, tel que $\frac{\gamma}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$.

$$\cos\frac{2\pi}{5}$$

L'acte de l'intelligence créatrice

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Une approche possible, quand on veut un résultat valable pour tout élément f d'un ensemble E, (ici les fonctions continues 2π périodiques), est de se demander pour quelles fonctions il suffirait d'avoir le résultat. Les deux membres de l'égalité dépendent linéairement de f, semblent stables par limite uniforme. Ne pourrait-on pas approcher f par des polynômes trigonométriques en appelant Stone Weierstrass à la rescousse ? Ou bien passer par les fonctions continues, 2π périodiques, C^1 par morceaux ?

Ma solution

Les deux membres de l'égalité dépendent linéairement de f et sont « stables » par convergence uniforme en f. On peut donc établir le résultat pour les polynômes trigonométriques, l'étendre aux fonctions continues, C^1 par morceaux, puis aux continues.

Pour $f(x) = e^{ipx} = \cos px + i\sin px$, on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 1$ si $p = 0$, 0 si $p \neq 0$.

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

Pour $p = 0$, (donc $f = 1$), on a $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma) = 1$, d'où l'égalité dans ce cas.

Pour $p \neq 0$,

$$\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip(x+k\gamma)} = \frac{e^{ipx}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ip\gamma}\right)^k.$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Or $\left(e^{ip\gamma}\right)=1$ est exclu, sinon il existerait a dans $\mathbb{Z}$ tel $p\gamma = 2a\pi$ et $\frac{\gamma}{\pi} = \frac{2a}{p} \in \mathbb{Q}$; on a donc une progression géométrique de raison différente de 1, donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip(x+k\gamma)} = \frac{e^{ipx}}{n}\times\frac{e^{ipn\gamma}-1}{e^{ip\gamma}-1}$$

$$= \frac{e^{ipx}}{n}\times\frac{e^{ipn\times\gamma/2}\,2i\sin\frac{pn\gamma}{2}}{e^{ip\gamma/2}\,2i\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{e^{ipx}}{n}\times e^{ip(n-1)\gamma/2}\times\frac{\sin\frac{pn\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

quantité, qui dans $\mathbb{C}$, tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$

Il en résulte que l'égalité est valable pour les fonctions du type $x \longmapsto \cos px$, ou $x \longmapsto \sin px$, donc, par linéarité, pour les polynômes trigonométriques.

Puis, si f est limite uniforme de fonction $(g_r)_{r\,r\in\mathbb{N}}$ continues, 2π périodiques, vérifiant l'égalité, alors f la vérifie. En effet, posons :

$$I_n(f) = I_n(f - g_r) + I_n(g_r),$$

et :

$$\left|I_n(f - g_r)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ||f - g_r||_\infty + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x + k\gamma) - g_r(x + k\gamma)\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, r_0$ tel que $\forall\, r \geq r_0$, $||f - g_r||_\infty \leq \varepsilon$, en particulier :

$$\left|I_n(f - g_{r_0})\right| \leq \frac{1}{2\pi} \times 2\pi \times \varepsilon + \frac{1}{n} \times n \times \varepsilon = 2\,\varepsilon;$$

puis, pour r_0 fixé, $\exists n_0$, $\forall\, n \geq n_0$, $I_n(g_{r_0}) \leq \varepsilon$, d'où, $\forall\, n \geq n_0$, $\left|I_n(f)\right| \leq 3\varepsilon$: on a bien $\lim_{n \to \infty} I_n(f) = 0$, c'est-à-dire l'égalité pour f.

Mais alors on peut conclure rapidement si on sait que f, continue 2π - périodique, est limite uniforme, sur $[0,\ 2\pi]$, de polynômes trigonométriques, grâce au Théorème de Stone Weierstrass.

Sinon, on fait un détour en passant par les fonctions continues, de classes C^1 par morceaux, qui sont alors sommes de leur série de Fourier qui converge uniformément. (Honnêtement, je ne sais pas si on n'utilise pas Stone-Weierstrass pour obtenir cela.)

L'égalité est donc vraie pour f continue, C^1 par morceaux.

Enfin, si f est bêtement sur $\mathbb{R}$, 2π- périodique, elle est uniformément continue. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, si $\frac{2\pi}{n} \leq \alpha$, en coupant

$\cos \frac{2\pi}{5}$

[0, 2π] en n segments, et en construisant g affine par morceaux, en joignant les points $\left(\frac{2k\pi}{n}, f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, on obtient g continue, de classe C^1 par morceaux, avec $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Pour conclure, f continue 2π - périodique est limite uniforme d'une suite de fonctions, 2π - périodiques, C^1 par morceaux pour lesquelles l'égalité est vérifiée, donc elle l'est pour f.

L'activité du prof de maths me fait souvent penser à un jeu de « puzzle » dont les pièces, au départ, se présentent sous la forme d'un ensemble disparate dans lequel il faut trouver du sens. En tant que joueur, j'essaie de reconnaître celles qui s'associent correctement pour faire une image cohérente. Ayant par exemple, identifié un fragment de la queue d'un oiseau, je recherche d'autres éléments pour suivre : assembler les différentes parties de l'oiseau pour l'avoir en entier. Ses pattes montrent qu'il est perché sur une branche. Il faut reconstituer l'arbre, etc.
Peu à peu, j'assemblerai ainsi des fragments, qu'il ne me restera ensuite qu'à accoler pour réaliser une fresque où chaque morceau aura une place précise dans le paysage.
De la même façon, le chercheur que je m'efforce d'être se trouve confronté à une multitude d'observations différentes à partir desquelles, il tente d'élucider le comportement d'un théorème dans un domaine déterminé : la vie des concepts par exemple.
C'est ce qui me permet de corriger le livre de l'étudiant, où ce parcours n'est pas fléché. De plus, je dois opérer un tri dans l'immense moisson d'informations qui me parvient, pour ne conserver que celles qui me permettront d'avancer. En état de vigilance, je garde continuellement à l'esprit l'ensemble des interrogations en rapport avec mon sujet d'analyse. À chaque fois que, dans un nouveau chapitre, je recueille une nouvelle donnée, je me demande si, et en quoi, elle pourrait éclairer ma lanterne et faire progresser ma recherche.

$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Un terrain particulièrement fertile pour mon enseignement se situe à la frontière entre des domaines apparemment sans rapport entre eux. Pour cette raison, entre

autre, la culture scientifique est un élément fondamental de l'apprentissage du métier d'enseignant. Un préalable que j'estime indispensable. Souvenons-nous, par exemple, il y a environ plus de cent dix ans, en 1895, quand on a découvert l'électron. À l'époque, on a pensé que cette petite chose qui tourne autour du noyau d'un atome était un tout petit caillou. C'était un brin de matière, cela semblait une évidence. Eh bien, plus de cent dix ans plus tard, on ne présente plus du tout l'électron comme un brin de matière. Et pourtant, cette conception erronée figure toujours au programme des lycéens. Aujourd'hui nous pouvons avoir un regard lucide sur cet objet. L'électron, nous disent les physiciens, est un paquet d'ondes. Qu'est-ce que cela veut dire ? Cela signifie que c'est un endroit où il y a des ondes qui s'accumulent. Mais que sont-elles, ces ondes ? Elles sont représentées par une formule mathématique savante qui nous a permis de savoir que le carré de ψ est égal à la probabilité de présence de l'objet en question. Plus personne n'y comprend rien. Eh oui, plus personne n'y comprend rien. Mais on a compris qu'on ne comprenait pas. Autrement dit, on a compris que la matière n'était pas ce qu'on imaginait, qu'elle n'est pas faite de tout petits cailloux. La matière est plutôt faite d'ondulations, de chocs dans l'espace en fonction du temps. Voilà un effort considérable pour être plus lucide, c'est-à-dire pour comprendre enfin que l'on avait cru comprendre et que l'on n'avait pas vraiment compris.

La connaissance est moins une accumulation de savoirs que la capacité d'interroger correctement l'Univers : encore une chose que l'on n'apprend nulle part. Nulle part on ne vous enseigne à poser correctement des questions. Or, la science est une discipline de remise en cause permanente. L'art de poser des questions fausses ou inadéquates, des questions auxquelles les connaissances d'une époque ne permettent pas de répondre, cet art semble faire partie de l'histoire de l'humanité. Pourquoi vouloir absolument réduire les mathématiques à des règles d'arithmétiques ? Il a fallu des milliers d'années pour passer d'une tache lumineuse qui bouge dans le ciel à un astre toujours identique à lui-même. Moralité, on ne voit qu'au moyen de concepts ; c'est une évidence rarement exprimée. Un sens sans concept permet de réagir immédiatement, pas de comprendre.